Eje Temático N° 1

Unidad N° 2: Exponentes y Radicales

Potenciación. Definición

Se llama potencia n-ésima de un número real "a", y se simboliza como a^n, a un número real "b" definido de la siguiente manera:

$$a^n = \underbrace{a.a.a.a \ldots \ldots .a}_{n\ veces} = b \quad si\ n \in \mathbb{Z}^+$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = b \quad si\ n \in \mathbb{Z}^-$$

- $a \in \mathbb{R}, y\ recibe\ el\ nombre\ de\ base\ de\ la\ potencia.$
- $n \in \mathbb{Z}, y\ recibe\ el\ nombre\ de\ exponente\ de\ la\ potencia.$
- $b \in \mathbb{R}, y\ recibe\ el\ nombre\ de\ potencia.$

Ejemplo:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{2} = \frac{81}{16}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8 \text{ o } \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$$

Radicación. Definición

Se llama raíz n-ésima de un número real "a", y se simboliza como $\sqrt[n]{a}$, a un número real "b" definido de la siguiente manera:

- Si $\boldsymbol{n\ es\ par}$, $a > 0, \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b > 0\ y\ b^n = a$
- Si $\boldsymbol{n\ es\ impar}$, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$
- $n \in \mathbb{N}\ se\ llama\ \boldsymbol{indice}\ y$ "a" se llama **radicando**.
- $\sqrt[n]{\ }\ se\ llama\ \boldsymbol{signo\ radical}\ y$ "b" se llama **radical**.
- $\sqrt[n]{a}\ \ se\ puede\ expresar\ como\ potencia\ de\ exponente\ fraccionario\ a^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{a^m} se\ puede\ expresar\ como\ potencia\ de\ exponente\ fraccionario\ a^{\frac{m}{n}}$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$$

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \pm\frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \wedge \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

Potenciación y Radicación en $\mathbb{R}$ - Propiedades

Propiedades de la Potenciación

Propiedades de la Potenciación	
Potencia de exponente 0	$a^0 = 1 \Leftrightarrow a \neq 0$
Potencia de exponente negativo	$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \Leftrightarrow a \neq 0$
Producto de potencias de igual base	$a^m . a^n = a^{m+n}$
Cociente de Potencias de igual base	$a^m : a^n = a^{m-n}$
Potencia de otra potencia	$(a^m)^n = a^{m.n}$
Distributividad respecto a la multiplicación	$(a.b)^n = a^n . b^n$
Distributividad respecto a la división	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Propiedades de la Radicación

La radicación se puede expresar como potencia de exponente fraccionario, esto es: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Propiedades de la Radicación	
Raíz de otra raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$
Distributividad respecto a la multiplicación	$\sqrt[m]{a.b} = \sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}$
Distributividad respecto a la división	$\sqrt[m]{a:b} = \sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}$
Simplificación de índices	$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:p]{a^{n:p}}$
Eliminación del radical	$\sqrt[n]{a^n} = a \Leftrightarrow n\ es\ impar$ $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert \Leftrightarrow n\ es\ par$
Amplificación de índices	$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m.p]{a^{n.p}}$

Observación: La potenciación y la radicación NO son distributivas respecto a la suma y a la resta.

Radicales semejantes

Dos radicales son semejantes si cuando tienen igual índice y el mismo radicando.

- Términos con radicales semejantes: $\sqrt{5}$ y $7.\sqrt{5}$; $-2.\sqrt[3]{2}\ \ y\ \ 5.\sqrt[3]{2}$
- Términos con radicales no semejantes $\sqrt{5}$ y $5.\sqrt{7}$; $-2.\sqrt[3]{2}\ \ y\ \ -2.\sqrt[5]{2}$

Adición y sustracción de radicales semejantes.

Solo es posible sumar y restar términos que contienen radicales semejantes. Para ello se suman o restan los coeficientes entre si y se multiplica por el mismo radical.

Ejemplo:

$$3.\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = (3 + 5 - 1).\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

Extracción de Factores fuera de un Radical

Existen factores, dentro de un radical, que pueden ser extraídos si el exponente de los mismos es mayor o a lo sumo igual que el índice de la raíz. Para ello deben aplicarse las propiedades de la potenciación y radicación.

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{16x^7} = \sqrt[3]{2^4x^6x} = \sqrt[3]{2^3.2.x^6} = \sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{x^6} = 2\sqrt[3]{2}.x^2.\sqrt[3]{x} = 2x^2\sqrt[3]{2x}$

b) $\sqrt{\frac{8.x^2}{y^3}} = \frac{\sqrt{2^3.x^2}}{\sqrt{y^2.y}} = \frac{\sqrt{2^2}.\sqrt{2}.\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}.\sqrt{y}} = \frac{2x}{y}\sqrt{\frac{2}{y}}$

<u>Adición y sustracción de radicales no semejantes.</u>
Existen casos en los que ciertos radicales son semejantes luego de llevarlos a su mínima expresión, para ello se aplica el procedimiento anterior de extracción de factores fuera del signo radical.
Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
3\sqrt{2} - 5\sqrt{32} + 7\sqrt{8} - 9\sqrt{50} &= 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2^5} + 7\sqrt{2^3} - 9\sqrt{2.5^2} \\
&= 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2.2^4} + 7\sqrt{2.2^2} - 9\sqrt{2.5^2} \\
&= 3\sqrt{2} - 5.\sqrt{2^4}.\sqrt{2} + 7.\sqrt{2^2}\sqrt{2} - 9.\sqrt{5^2}\sqrt{2} \\
&= 3\sqrt{2} - 5.\sqrt{2^4}.\sqrt{2} + 7.\sqrt{2^2}\sqrt{2} - 9.\sqrt{5^2}\sqrt{2} \\
&= 3\sqrt{2} - 5.2^2.\sqrt{2} + 7.2.\sqrt{2} - 9.5.\sqrt{2} \\
&= (3 - 20 + 14 - 45).\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$3\sqrt{2} - 5\sqrt{32} + 7\sqrt{8} - 9\sqrt{50} = -48.\sqrt{2}$$

<u>Multiplicación y división de radicales</u>

Para efectuar cualquier multiplicación o división de radicales, estos deben tener el mismo índice. Para que los índices de dos o más radicales sean iguales se debe calcular el **m.c.m.** de los índices de los radicales dados, obteniéndose así el **mínimo común índice**.
Ejemplo

$\sqrt{5}\ y\ \sqrt[3]{7} \longrightarrow m.c.m(2;3) = 6\ ambos\ radicales\ deben\ tener\ indice\ 6$

$$\sqrt{5} = \sqrt[2.3]{5^{1.3}} = \sqrt[6]{125} \qquad y \qquad \sqrt[3]{7} = \sqrt[3.2]{7^{1.2}} = \sqrt[6]{49}$$

<u>Multiplicación y división de radicales de distintos índices</u>

Para multiplicar o dividir radicales de distintos índices, se los debe reducir al mínimo común índice y luego aplicar las propiedades reciprocas de las distributivas de la radicación respecto de la multiplicación y división.

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}\ldots.\sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{a.b.c\ldots d} \quad \wedge \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

<u>Ejemplo</u>

$a)\ \sqrt{2}.\sqrt[3]{5} = \sqrt[2.3]{2}.\sqrt[3.2]{5} = \sqrt[6]{2}.\sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{2.5} = \sqrt[6]{10}$

$b)\ \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[6]{2^5}} = \frac{\sqrt[4.3]{2^{3.3}}}{\sqrt[6.2]{2^{5.2}}} = \frac{\sqrt[12]{2^9}}{\sqrt[12]{2^{10}}} = \sqrt[12]{\frac{2^9}{2^{10}}} = \sqrt[12]{\frac{1}{2}}$

<u>Racionalización de Denominadores</u>

Racionalizar el denominador de una fracción es transformarlo en un número racional; por lo tanto, siempre que en el mismo aparezcan radicales irracionales se debe hallar una fracción equivalente a la dada con denominador racional.

1° Caso: en el denominador hay un único radical

a) Racionalizar $\frac{1}{\sqrt[2]{5}}$. Procedemos de la siguiente manera: $\frac{1}{\sqrt[2]{5}} = \frac{1}{\sqrt[2]{5}}.\frac{\sqrt[2]{5}}{\sqrt[2]{5}} = \frac{\sqrt[2]{5}}{\sqrt[2]{5.5}} = \frac{\sqrt[2]{5}}{\sqrt[2]{5^2}} = \frac{\sqrt[2]{5}}{5}$

b) Racionalizar $\frac{2}{\sqrt[4]{x^3.y^2}}$. Hacemos: $\frac{2}{\sqrt[4]{x^3.y^2}} = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3.y^2}} . \frac{\sqrt[4]{x.y^2}}{\sqrt[4]{x.y^2}} = \frac{2\sqrt[4]{x.y^2}}{\sqrt[4]{x^4.y^4}} = \frac{\sqrt[4]{x.y^2}}{x.y}$

2° Caso: el denominador es una suma o resta de uno o dos radicales de índice 2.

Para racionalizar este tipo de expresiones, se debe aplicar el producto de una suma de dos términos por su diferencia: $(a-b).(a+b) = a^2 - b^2$ (conocida como diferencia de cuadrados)

Para racionalizar: $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$. Procedemos de la siguiente manera:

$$\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} . \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} . = \frac{3.(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} . = \frac{3.(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5} = \frac{-3}{2} . (\sqrt{3}+\sqrt{5})$$

Como ejercicio racionalizar: $\frac{\sqrt{2}-1}{4-\sqrt{6}} =$

<u>Operaciones en Notación Científica</u>

<u>Suma y resta en notación científica</u>

Para sumar o restar números en notación científica, éstos deben tener el mismo exponente en la potencia de 10.

Cumpliendo esta condición, se suman o restan los números que multiplican a la potencia de base 10, extrayendo como factor común dicha potencia.

En símbolos:

$$\boxed{\begin{array}{c} a.10^n + b.10^n = (a+b).10^n \\ a.10^n - b.10^n = (a+b).10^n \end{array}}$$

Ejemplo:

$$2{,}35.10^2 + 5{,}23.10^2 = (2{,}35 + 5{,}23).10^2 = 7{,}58.10^2$$

$$6{,}25.10^5 - 5{,}15.10^5 = (6{,}25 - 5{,}15).10^5 = 1{,}1.10^5$$

Cuando los exponentes de las potencias de base 10 no son iguales, hay que realizar las modificaciones correspondientes para igualarlos.

A continuación, se muestra, con la ayuda de varios ejemplos, el procedimiento para modificar el exponente de la potencia de base 10 de un número expresado en notación científica.

Ejemplo:

Dado el número en notación científica: $6{,}25.10^3$ (exponente positivo)

- Expresarlo como potencia de exponente 5.

  Al pasar de 10^3 a 10^5, la potencia está siendo 100 veces mayor. Entonces, para mantener su valor, se debe hacer el número 100 veces más pequeño, dividiéndolo por 100 (10^2)o corriendo la coma dos lugares hacia la izquierda.

  $$\mathbf{6,25.10^3} = (6{,}25:10^2).(10^3.10^2) = \mathbf{0,0625.10^5}$$

- Expresarlo como potencia de exponente -1
  Al pasar de 10^3 a 10^{-1}, la potencia está siendo 10000 veces menor. Entonces, para mantener su valor, se debe hacer el número 10000 veces más grande, multiplicándolo por 10000 (10^4) o corriendo la coma cuatro lugares hacia la derecha.

  $$\mathbf{6,25.10^3} = (6{,}25.10^4).(10^3.10^{-4}) = \mathbf{62.00.10^{-1}}$$

Dado el número en notación científica: $6{,}25.10^{-3}$ (exponente negativo)

- Expresarlo como potencia de exponente -2.
Al pasar de 10^{-3} a 10^{-2}, la potencia está siendo 10 veces mayor. Entonces, para mantener su valor, se debe hacer el número 100 veces más pequeño, dividiéndolo por 100 (10^{1}) o corriendo la coma un lugar hacia la izquierda.

$$\mathbf{6,25.10^{-3}} = (6{,}25:10^{1}).(10^{-3}.10^{1}) = \mathbf{0,625.10^{-2}}$$

- Expresarlo como potencia de exponente -6
Al pasar de 10^{-3} a 10^{-6} la potencia está siendo 1000 veces menor. Entonces, para mantener su valor, se debe hacer el número 1000 veces más grande, multiplicándolo por 1000 (10^{3}) o corriendo la coma tres lugares hacia la derecha.

$$\mathbf{6,25.10^{-3}} = (6{,}25.10^{3}).(10^{-3}.10^{-3}) = \mathbf{6.250.10^{-6}}$$

Conociendo el procedimiento para modificar el exponente de la potencia de base 10, se pueden sumar o restar números expresados en notación cuyas bases poseen distintos exponentes.
Ejemplo:
$$3{,}25.10^{2} + 1{,}38.10^{3} - 5{,}34.10^{-1}$$

1- Como todos los exponentes son distintos se deben igualar a uno común. Por ejemplo se puede igualar a exponente 5.
$$\mathbf{3,25.10^{2}} = (3{,}25:10^{1}).(10^{2}.10^{1}) = \mathbf{0,325.10^{3}}$$
$$\mathbf{5,34.10^{-1}} = (5{,}34:10^{4}).(10^{-1}.10^{4}) = \mathbf{0,000534.10^{3}}$$

2- Una vez que todos los términos tengan la misma potencia de base 10 se procede a realizar la suma algebraica:

$$3{,}25.10^{2} + 1{,}38.10^{3} - 5{,}34.10^{-1} = 0{,}325.10^{3} + 1{,}38.10^{3} - 0{,}000534.10^{3}$$
$$3{,}25.10^{2} + 1{,}38.10^{3} - 5{,}34.10^{-1} = (0{,}325 + 1{,}38 - 0{,}000534).10^{3}$$
$$3{,}25.10^{2} + 1{,}38.10^{3} - 5{,}34.10^{-1} = 1{,}70.10^{3}$$

<u>Multiplicación y división en notación científica</u>

Para multiplicar y dividir números expresados en notación científica, hay que tener en cuenta las **propiedades de la potenciación.**

<u>Multiplicación</u>

Para multiplicar dos o más números expresados en notación científica, se multiplican las expresiones decimales de las mismas, entre si luego las potencias de base 10, aplicando la **propiedad de producto de potencias de igual base.**

$$\boxed{(\boldsymbol{a}.\mathbf{10^{n}}).(\boldsymbol{b}.\mathbf{10^{m}}) = (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})(\mathbf{10^{n}}.\mathbf{10^{m}}) = (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})(\mathbf{10^{n+m}})}$$

Ejemplo:
$$\mathbf{(5,3.10^{2}).(3,5.10^{6}) = (5,3.3,5).(10^{2}.10^{6}) = 18,55.10^{8} = 1,855.10^{9}}$$

<u>División</u>
Para dividir dos números expresados en notación científica, se dividen las expresiones decimales de las mismas, entre si luego las potencias de base 10, aplicando la **propiedad de cociente de potencias de igual base.**

$$\boxed{(\boldsymbol{a}.\mathbf{10^{n}}):(\boldsymbol{b}.\mathbf{10^{m}}) = (\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b})(\mathbf{10^{n}}:\mathbf{10^{m}})}$$

Ejemplo:
$$\mathbf{(5,3.10^{2}):(3,5.10^{6}) = (5,3:3,5).(10^{2}:10^{6}) = 1,51.10^{-4}}$$

Guía de Trabajos Prácticos N° 2

Exponentes y Radicales

1) Colocar V (verdadero) o F (falso) según corresponda, trabajando en el conjunto de números reales. En caso de que sea falso, resolver correctamente.

a) $\square$ $\sqrt{64.9} = \sqrt{64}.\sqrt{9} = 24$

b) $\square$ $\sqrt{100-64} = \sqrt{100} - \sqrt{64} = 2$

c) $\square$ $\sqrt{100:25} = \sqrt{100}:\sqrt{25} = 2$

d) $\square$ $\sqrt{\sqrt[3]{p}} = \sqrt[5]{p}$

e) $\square$ $\sqrt{4^3} = 2^3$

f) $\square$ $\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{2.(-4)} = \sqrt[3]{-8} = 2$

g) $\square$ $\sqrt{-8}.\sqrt[2]{2}. = \sqrt{16} = 4$

h) $\square$ $a > 0, c > 0, entonces\ \sqrt[4]{a^8.c^2} = a^4.c$

i) $\square$ $2\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} = -2\sqrt[3]{2}$

j) $\square$ $5\sqrt[2]{7} - \sqrt[2]{7} = 4\sqrt[2]{7}$

2) Realizar las siguientes operaciones y expresar los resultados como potencias.

a) $a^2.a^3.a$

b) $25^0 =$

c) $a^{-2}.a.b^5.a^3.b^{-3} =$

d) $\frac{p^5.p^{-1}}{p^3} =$

e) $\frac{m^5}{m^{-2}} =$

f) $(2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{-1}{4}})^2 =$

g) $2^4.2^{\frac{-1}{2}} : \left(2^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{-3}{2}}\right) =$

h) $([(12^2)^{-3}]^{\frac{1}{6}} =$

i) $([(m^2)^0]^{10} =$

j) $\frac{(\frac{1}{2})^{-\frac{3}{2}}.2^1}{3^{-\frac{2}{3}}.\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}} =$

3) Extraer factores fuera del radical y escribir la mínima expresión.

a) $\sqrt[3]{16x^7} =$

b) $\sqrt[2]{75.x^3.y^4.z} =$

c) $\sqrt[2]{9.a^2b^627} =$

d) $\sqrt[5]{\frac{128}{243}.y^5} =$

e) $\sqrt[4]{\frac{32.x^{10}}{81.y^{20}}} =$

f) $\sqrt[3]{\frac{81.m^{11}.n^{16}}{125}} =$

4) Resolver las siguientes operaciones con radicales.

a) $3.\sqrt{18} - 11.\sqrt{2} + 2.\sqrt{50} =$

$d)\ \sqrt{4x}.\sqrt[3]{x^2}.\sqrt[6]{16.x^3} =$

b) $\sqrt[4]{9.y^8} + \sqrt[6]{27.y^{12}} =$

e) $\frac{\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt[5]{m^2}} =$

c) $\sqrt[4]{2.a^2}.\sqrt[4]{3.a}.\sqrt[4]{b} =$

f) $\frac{\sqrt[3]{9.x}}{\sqrt[4]{27.x^2}} =$

5) Racionalizar los siguientes denominadores y escribir la mínima expresión.

a) $\frac{10}{\sqrt[2]{3}} =$

d) $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt[2]{2}} =$

g) $\frac{\sqrt[2]{2}-\sqrt[2]{3}}{\sqrt[2]{2}+\sqrt[2]{3}} =$

b) $\frac{2x}{3\sqrt[3]{x}} =$

e) $\frac{\sqrt[2]{3}}{1+\sqrt[2]{3}} =$

h) $\frac{\sqrt[2]{15}}{\sqrt[2]{5}+\sqrt[2]{3}} =$

c) $\frac{\sqrt[2]{2x}}{3\sqrt[3]{2x}} =$

f) $\frac{3-\sqrt[2]{2}}{3+\sqrt[2]{2}} =$

i) $\frac{4-\sqrt[2]{7}}{\sqrt[2]{5}-16} =$

6) Resolver las siguientes operaciones en notación científica

a) $6.5.10^{-10} - 4{,}25.10^{-10} + 4{,}15.10^{-9} =$

d) $(4{,}16.10^{2}).(5{,}2.10^{3}) =$

b) $3{,}5.10^{5} + 2{,}3.10^{3} - 1{,}25.10^{3} =$

e) $\frac{7.21.10^{9}}{3.25.10^{5}}$

c) $(2{,}75.10^{-5}).(3.15.10^{9}) =$

f) $\frac{6{,}27.10^{-5}}{4{,}35.10^{-8}} =$

$$g)\ \frac{(9{,}25.10^{7} - 5.10^{9}).(4{,}5.10^{-4} + 2{,}25.10^{-5})}{2{,}35.10^{8}} =$$

7) Resuelve aplicando las operaciones en notación científica que correspondan.

a) La masa de la Tierra es de $5{,}98.10^{24} kg$. ¿Cuál sería la masa equivalente a 3 planetas iguales a la tierra?
b) Un microscopio permite observar un objeto a un tamaño $2{,}5.10^{4}$ veces más grande que el auténtico. ¿A qué tamaño se verá una partícula de polvo que mide 5.10^{-5}metros?
c) La masa de un protón es de aproximadamente $1{,}6726.10^{-24}$ gramos. ¿Cuántos protones serían necesarios para formar una masa de 48 toneladas? (1 tonelada=1000000 gramos)
d) La masa de un protón es de aproximadamente $1{,}6726.10^{-27} kg$ unas 1836 veces más que un electrón. Con estos datos puedes calcular la masa aproximada de un electrón.
e) En un depósito de $6m^3$ se pueden colocar $2{,}4.10^{29}$ bolitas de acero. ¿Cuántas se podrán colocar en $1dm^3$. $(1m^3 = 1000dm^3)$.
f) Si la distancia de la Tierra al Sol es, aproximadamente $1{,}4.10^{8}$. y la distancia de la Tierra a la Luna es 4.10^{5} km., calcula la distancia de la Luna al Sol en el momento que muestra la figura.